

Условие задачи

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15 | 23 | 13 | 180 |
| 2 | 22 | 12 | 20 | 17 | 19 | 25 | 125 |
| 3 | 13 | 17 | 23 | 20 | 14 | 23 | 162 |
| 4 | 16 | 22 | 22 | 15 | 25 | 14 | 171 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12 | 22 | 16 | 112 |
| Потребность | 155 | 119 | 143 | 205 | 107 | 175 |  |

Для разрешимости транспортной задачи необходимо, чтобы суммарные запасы продукции у поставщиков равнялись суммарной потребности потребителей. Проверим это условие.

∑a = 180 + 125 + 162 + 171 + 112 = 750

∑b = 155 + 119 + 143 + 205 + 107 + 175 = 904

Задача является открытой (с нарушенным балансом).

Так как запасы поставщиков меньше потребности потребителей, введем фиктивного поставщика 6, с запасом продукции равным 904-750=154. Стоимость доставки единицы продукции от фиктивного поставщика ко всем потребителям примем равной нулю.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15 | 23 | 13 | 180 |
| 2 | 22 | 12 | 20 | 17 | 19 | 25 | 125 |
| 3 | 13 | 17 | 23 | 20 | 14 | 23 | 162 |
| 4 | 16 | 22 | 22 | 15 | 25 | 14 | 171 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12 | 22 | 16 | 112 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154 |
| Потребность | 155 | 119 | 143 | 205 | 107 | 175 |  |

Теперь выполняется условие закрытой задачи.

Общая транспортная задача имеет 12 ограничений в виде равенств, по одному на каждый пункт отправления и назначения. Т. к. транспортная задача д.б. сбалансированной, то одно из этих равенств избыточно. Т.о. транспортная задача имеет 13 независимых ограничений, отсюда вытекает, что начальное базисное решение состоит из 13 базисных переменных.

**Этап I**

***Метод наименьшей стоимости***

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают клетку с наименьшей стоимостью, для этой ячейки присваиваем меньшее из чисел ai, или bj. Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Повторяем, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Искомый элемент равен c22=12.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15 | 23 | 13 | 180 |
| 2 | 22 | 12 | 20 | 17 | 19 | 25 | 125-119=6 |
| 3 | 13 | 17 | 23 | 20 | 14 | 23 | 162 |
| 4 | 16 | 22 | 22 | 15 | 25 | 14 | 171 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12 | 22 | 16 | 112 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154 |
| Потребность | 155 | 119-119=0 | 143 | 205 | 107 | 175 |  |

x22 = min(125,119) = 119.

Искомый элемент равен c54=12. Для этого элемента запасы равны 112, потребности 205. Поскольку минимальным является 112, то вычитаем его.  
x54 = min(112,205) = 112.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15 | 23 | 13 | 180 |
| 2 | 22 | 12|119 | 20 | 17 | 19 | 25 | 6 |
| 3 | 13 | 17 | 23 | 20 | 14 | 23 | 162 |
| 4 | 16 | 22 | 22 | 15 | 25 | 14 | 171 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12 | 22 | 16 | 112-112=0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154 |
| Потребность | 155 | 0 | 143 | 205-112=93 | 107 | 175 |  |

Искомый элемент равен c16=13. Для этого элемента запасы равны 180, потребности 175.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15 | 23 | 13 | 180-175=5 |
| 2 | 22 | 12|119 | 20 | 17 | 19 | 25 | 6 |
| 3 | 13 | 17 | 23 | 20 | 14 | 23 | 162 |
| 4 | 16 | 22 | 22 | 15 | 25 | 14 | 171 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12|112 | 22 | 16 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154 |
| Потребность | 155 | 0 | 143 | 93 | 107 | 175-175=0 |  |

Поскольку минимальным является 175, то вычитаем его.  
x16 = min(180,175) = 175.

Искомый элемент равен c31=13. Для этого элемента запасы равны 162, потребности 155. Поскольку минимальным является 155, то вычитаем его.  
x31 = min(162,155) = 155.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15 | 23 | 13|175 | 5 |
| 2 | 22 | 12|119 | 20 | 17 | 19 | 25 | 6 |
| 3 | 13 | 17 | 23 | 20 | 14 | 23 | 162-155=7 |
| 4 | 16 | 22 | 22 | 15 | 25 | 14 | 171 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12 | 22 | 16 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154 |
| Потребность | 155-155=0 | 0 | 143 | 93 | 107 | 0 |  |

Искомый элемент равен c35=14. Для этого элемента запасы равны 7, потребности 107. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.  
x35 = min(7,107) = 7.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15 | 23 | 13|175 | 5 |
| 2 | 22 | 12|119 | 20 | 17 | 19 | 25 | 6 |
| 3 | 13|155 | 17 | 23 | 20 | 14 | 23 | 7-7=0 |
| 4 | 16 | 22 | 22 | 15 | 25 | 14 | 171 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12 | 22 | 16 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154 |
| Потребность | 0 | 0 | 143 | 93 | 107-7=100 | 0 |  |

Искомый элемент равен c14=15. Для этого элемента запасы равны 5, потребности 93. Поскольку минимальным является 5, то вычитаем его.  
x14 = min(5,93) = 5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |  |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15 | 23 | 13|175 | 5-5=0 |
| 2 | 22 | 12|119 | 20 | 17 | 19 | 25 | 6 |
| 3 | 13 | 17 | 23 | 20 | 14|7 | 23 | 0 |
| 4 | 16 | 22 | 22 | 15 | 25 | 14 | 171 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12 | 22 | 16 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154 |
| Потребность | 0 | 0 | 143 | 93-5=88 | 100 | 0 |  |

Искомый элемент равен c44=15. Для этого элемента запасы равны 171, потребности 88. Поскольку минимальным является 88, то вычитаем его.  
x44 = min(171,88) = 88.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |  |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15 | 23 | 13|175 | 0 |
| 2 | 22 | 12|119 | 20 | 17 | 19 | 25 | 6 |
| 3 | 13|155 | 17 | 23 | 20 | 14|7 | 23 | 0 |
| 4 | 16 | 22 | 22 | 15 | 25 | 14 | 171-88=83 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12 | 22 | 16 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154 |
| Потребность | 0 | 0 | 143 | 88-88=0 | 100 | 0 |  |

Искомый элемент равен c25=19. Для этого элемента запасы равны 6, потребности 100. Поскольку минимальным является 6, то вычитаем его.  
x25 = min(6,100) = 6.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15|5 | 23 | 13|175 | 0 |
| 2 | 22 | 12|119 | 20 | 17 | 19 | 25 | 6-6=0 |
| 3 | 13|155 | 17 | 23 | 20 | 14|7 | 23 | 0 |
| 4 | 16 | 22 | 22 | 15|88 | 25 | 14 | 83 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12|112 | 22 | 16 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154 |
| Потребность | 0 | 0 | 143 | 0 | 100-6=94 | 0 |  |

Искомый элемент равен c43=22. Для этого элемента запасы равны 83, потребности 143. Поскольку минимальным является 83, то вычитаем его.  
x43 = min(83,143) = 83.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15|5 | 23 | 13|175 | 0 |
| 2 | 22 | 12|119 | 20 | 17 | 19|6 | 25 | 0 |
| 3 | 13|155 | 17 | 23 | 20 | 14|7 | 23 | 0 |
| 4 | 16 | 22 | 22 | 15|88 | 25 | 14 | 83-83=0 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12|112 | 22 | 16 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154 |
| Потребность | 0 | 0 | 143-83=60 | 0 | 94 | 0 |  |

Искомый элемент равен c63=0. Для этого элемента запасы равны 154, потребности 60. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.  
x63 = min(154,60) = 60.

Искомый элемент равен c65=0. Для этого элемента запасы равны 94, потребности 94. Поскольку минимальным является 94, то вычитаем его.  
x65 = min(94,94) = 94.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15|5 | 23 | 13|175 | 0 |
| 2 | 22 | 12|119 | 20 | 17 | 19|6 | 25 | 0 |
| 3 | 13|155 | 17 | 23 | 20 | 14|7 | 23 | 0 |
| 4 | 16 | 22 | 22|83 | 15|88 | 25 | 14 | 0 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12|112 | 22 | 16 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 154-60=94 |
| Потребность | 0 | 0 | 60-60=0 | 0 | 94 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15|5 | 23 | 13|175 | 0 |
| 2 | 22 | 12|119 | 20 | 17 | 19|6 | 25 | 0 |
| 3 | 13|155 | 17 | 23 | 20 | 14|7 | 23 | 0 |
| 4 | 16 | 22 | 22|83 | 15|88 | 25 | 14 | 0 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12|112 | 22 | 16 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0|60 | 0 | 0 | 0 | 94-94=0 |
| Потребность | 0 | 0 | 0 | 0 | 94-94=0 | 0 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15|5 | 23 | 13|175 | 180 |
| 2 | 22 | 12|119 | 20 | 17 | 19|6 | 25 | 125 |
| 3 | 13|155 | 17 | 23 | 20 | 14|7 | 23 | 162 |
| 4 | 16 | 22 | 22|83 | 15|88 | 25 | 14 | 171 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12|112 | 22 | 16 | 112 |
| 6 | 0 | 0 | 0|60 | 0 | 0|94 | 0 | 154 |
| Потребность | 155 | 119 | 143 | 205 | 107 | 175 |  |

Подсчитаем число занятых клеток таблицы(Количество базисных переменных), их 11, а должно быть m + n - 1 = 11. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:  
F(x) = 15\*5 + 13\*175 + 12\*119 + 19\*6 + 13\*155 + 14\*7 + 22\*83 + 15\*88 + 12\*112 + 0\*60 + 0\*94 = 10495

**Этап II**

***Метод потенциалов***

Каждому поставщику ai ставим в соответствие некоторое число - ui, называемое *потенциалом поставщика*. Каждому потребителю bj ставим в соответствие некоторое число - vj, называемое *потенциалом потребителя*. Для базисной ячейки (задействованного маршрута), сумма потенциалов поставщика и потребителя должна быть равна тарифу данного маршрута.

ui + vj = cij

Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 15; 0 + v4 = 15; v4 = 15  
u4 + v4 = 15; 15 + u4 = 15; u4 = 0  
u4 + v3 = 22; 0 + v3 = 22; v3 = 22  
u6 + v3 = 0; 22 + u6 = 0; u6 = -22  
u6 + v5 = 0; -22 + v5 = 0; v5 = 22  
u2 + v5 = 19; 22 + u2 = 19; u2 = -3  
u2 + v2 = 12; -3 + v2 = 12; v2 = 15  
u3 + v5 = 14; 22 + u3 = 14; u3 = -8  
u3 + v1 = 13; -8 + v1 = 13; v1 = 21  
u5 + v4 = 12; 15 + u5 = 12; u5 = -3  
u1 + v6 = 13; 0 + v6 = 13; v6 = 13

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15|5 | 23 | 13|175 | u1=0 |
| 2 | 22 | 12|199 | 20 | 17 | 19|6 | 25 | u2=-3 |
| 3 | 13|155 | 17 | 23 | 20 | 14|7 | 23 | u3=-8 |
| 4 | 16 | 22 | 22|83 | 15|88 | 25 | 14 | u4=0 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12|112 | 22 | 16 | u5=-3 |
| 6 | 0 | 0 | 0|60 | 0 | 0|94 | 0 | u6=-22 |
| Потребность | v1 = 21 | v2 = 15 | v3 = 22 | v4 =15 | v5 =22 | v6 = 13 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;2): 0 + 15 > 14; ∆12 = 0 + 15 - 14 = 1 > 0  
(1;3): 0 + 22 > 18; ∆13 = 0 + 22 - 18 = 4 > 0  
(4;1): 0 + 21 > 16; ∆41 = 0 + 21 - 16 = 5 > 0  
(5;1): -3 + 21 > 15; ∆51 = -3 + 21 - 15 = 3 > 0  
max(1,4,5,3) = 5

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (4;1): 16  
Для этого в перспективную клетку (4;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15|5 | 23 | 13|175 | u1=0 |
| 2 | 22 | 12|199 | 20 | 17 | 19|6 | 25 | u2=-3 |
| 3 | 13|155| - | 17 | 23 | 20 | 14|7|+ | 23 | u3=-8 |
| 4 | 16| + | 22 | 22|83|- | 15|88 | 25 | 14 | u4=0 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12|112 | 22 | 16 | u5=-3 |
| 6 | 0 | 0 | 0|60|+ | 0 | 0|94|- | 0 | u6=-22 |
| Потребность | v1 = 21 | v2 = 15 | v3 = 22 | v4 =15 | v5 =22 | v6 = 13 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Цикл приведен в таблице (4,1 → 4,3 → 6,3 → 6,5 → 3,5 → 3,1).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (4, 3) = 83. Прибавляем 83 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 83 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15|5 | 23 | 13|175 | 180 |
| 2 | 22 | 12|199 | 20 | 17 | 19|6 | 25 | 125 |
| 3 | 13|72 | 17 | 23 | 20 | 14|90 | 23 | 162 |
| 4 | 16| 83 | 22 | 22 | 15|88 | 25 | 14 | 171 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12|112 | 22 | 16 | 112 |
| 6 | 0 | 0 | 0|143 | 0 | 0|11 | 0 | 154 |
| Потребность | 155 | 119 | 143 | 205 | 107 | 175 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v4 = 15; 0 + v4 = 15; v4 = 15  
u4 + v4 = 15; 15 + u4 = 15; u4 = 0  
u4 + v1 = 16; 0 + v1 = 16; v1 = 16  
u3 + v1 = 13; 16 + u3 = 13; u3 = -3  
u3 + v5 = 14; -3 + v5 = 14; v5 = 17  
u2 + v5 = 19; 17 + u2 = 19; u2 = 2  
u2 + v2 = 12; 2 + v2 = 12; v2 = 10  
u6 + v5 = 0; 17 + u6 = 0; u6 = -17  
u6 + v3 = 0; -17 + v3 = 0; v3 = 17  
u5 + v4 = 12; 15 + u5 = 12; u5 = -3  
u1 + v6 = 13; 0 + v6 = 13; v6 = 13

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 24 | 14 | 18 | 15|5 | 23 | 13|175 | u1=0 |
| 2 | 22 | 12|199 | 20 | 17 | 19|6 | 25 | u2=2 |
| 3 | 13|72 | 17 | 23 | 20 | 14|90 | 23 | u3=-3 |
| 4 | 16| 83 | 22 | 22 | 15|88 | 25 | 14 | u4=0 |
| 5 | 15 | 23 | 21 | 12|112 | 22 | 16 | u5=-3 |
| 6 | 0 | 0 | 0|143 | 0 | 0|11 | 0 | u6=-17 |
| Потребность | v1 = 16 | v2 = 10 | v3 = 17 | v4 =15 | v5 =17 | v6 = 13 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.  
Минимальные затраты составят:

F(x) = 15\*5 + 13\*175 + 12\*119 + 19\*6 + 13\*72 + 14\*90 + 16\*83 + 15\*88 + 12\*112 + 0\*143 + 0\*11 = 10080  
**Анализ оптимального плана**.  
Из 1-го склада необходимо груз направить в 4-й магазин (5 ед.), в 6-й магазин (175 ед.)  
Из 2-го склада необходимо груз направить в 2-й магазин (119 ед.), в 5-й магазин (6 ед.)  
Из 3-го склада необходимо груз направить в 1-й магазин (72 ед.), в 5-й магазин (90 ед.)  
Из 4-го склада необходимо груз направить в 1-й магазин (83 ед.), в 4-й магазин (88 ед.)  
Из 5-го склада необходимо весь груз направить в 4-й магазин.  
Потребность 3-го магазина остается неудовлетворенной на 143 ед.  
Оптимальный план является вырожденным, так как базисная переменная x63=0.  
Потребность 5-го магазина остается неудовлетворенной на 11 ед.  
Оптимальный план является вырожденным, так как базисная переменная x65=0.

Вывод: в ходе выполнения лабораторной работы были приобретены навыки решения открытой транспортной задачи с применением метода потенциалов.